数理解析研究所講究録
394巻 1980年 127-137

Lobachevsky空間のdiscrete groupについて
―Vinbergの一連の論文の紹介(II)―

東大理学部　山口　浩

単連結な定曲率空間Xにおける離散鏡映群Γは，Xを自然な形で実線型空間Vに埋め込むことによって，線型Coxeter群と見ることができる（植野氏の報告参照）。ここでは，このようなΓを，さらに直交Coxeter群としてとらえ，なかでも重要な楕円型，放物型，及び双曲型Coxeter群について述べる。

§1. 直交Coxeter群

Vを有限次元実線型空間，ΓをVの鏡映$R_1, \cdots R_m$で生成される線型Coxeter群とする。ここでR_iは次で定義されるものとする。　$R_i v = v - \alpha_i(v) h_i$　$(v \in V)$　；　$\alpha_i \in V^*, h_i \in V$
$[h]$で$h_1, \cdots h_m$によって張られるVの部分空間を表わす。また　$a_{ij} = \alpha_i(h_j)$，$A = (a_{ij})$　とおく。　AはΓのCartan行列と呼ばれるものである。　ここでR_iに対するα_i及びh_iのとり

方には(正の)スカラー倍だけの任意性がある訳であるが、ここではあらかじめ固定されたものとして、話を進める。

[定義]　Γが直交Coxeter群であるとは　[$\mathfrak{h}$]上の非退化な対称双一次形式$(\ ,\ )$で次を満すものが存在するときをいう。

(1)　$(\ ,\ )$はΓ不変

(2)　$(h_i, h_i) > 0 \qquad 1 \leq i \leq m$

定義から直ちに分るように、単連結な定曲率空間の離散鏡映群は、直交Coxeter群となる。　(1)のΓ不変という性質を書き直せば、次の補題を得る。

[補題1]　Γを線型Coxeter群、$(\ ,\ )$を$(h_i, h_i)=2$をみたすような[$\mathfrak{h}$]上の内積とする。　このとき

$(\ ,\ )$がΓ不変　$\Leftrightarrow$　$(h_i, h_j) = a_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq m$

この補題に注意すると次の定理を得る。

[定理1]　Aを線型Coxeter群ΓのCartan行列とするとき

Γが直交Coxeter群　$\Leftrightarrow$　Aが対称化可能.

さらにこのとき，α_i，e_i を正のスカラー倍でおきかえることにより，（鏡映 R_i は変えることなく） $A=((e_i,e_j))$ となる様な $[e]$ 上の Γ 不変な内積が存在する。

ここで A が対称化可能とは，適当な正の対角行列 D によって DAD^{-1} が対称行列になることを言う。 植野氏の報告中の§3を参照すれば，次の命題を得る。

[命題1]　$A\in M_m(\mathbb{R})$ が次の条件(C1) を満すとする

(C1)：　$a_{ij}\leqq 0\ (i\neq j)$ 　かつ　$a_{ij}=0 \Leftrightarrow a_{ji}=0$

このとき A が対称化可能であるためには，A 及び ${}^tA$ の cyclic product がすべて一致することが必要十分である。

線型 Coxeter 群の一般論より，Cartan 行列 A は (C1) をみたすから，定理1 及び命題1 は 直交性の判定を与える。

[定義]　$A\in M_m(\mathbb{R})$ は(C1) を満すとする。 A の長さ3以上の cyclic product が全て 0 になるとき，A を非輪状 (acyclic) と呼ぶ。 命題1 より，A はこのとき対称化可能である。

[補題2] Aを分解不能で(C1), (C2) を満す行列とする

(C1) $a_{ij} \leqq 0 \quad (i \neq j) \qquad a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$

(C2) $a_{ii} = 2 \quad ; \quad a_{ij}a_{ji} = 4\cos^2 \pi/n_{ij} \quad n_{ij} \geqq 2,\ n_{ij} \in \mathbb{Z}$

または $\geqq 4$.

このとき.

Aが(P)型 ⇨ Aは非輪状

Aが(Z)型 ⇨ Aは非輪状 もしくは $A \sim \tilde{A}_\ell$

ただし

$$\tilde{A}_\ell = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\ell+1} \qquad \ell \geqq 2$$

この補題により. Aはとくに対称化可能であり. 線型Coxeter群のCartan行列は(C1), (C2) をみたすことに注意すれば次の系を得る。

[系] Γを線型Coxeter群. Aをその Cartan行列とするとき Aが(N)成分を持たないならば Γは直交Coxeter群.

さて. 線型Coxeter群Γ に対して CosΓ はΓのCoxeter群としての情報を全て与えるものであるが. ΓのCartan行列A とCosΓ とが. ある条件下では同値になる。 そのことを次に述べて この§を終わる。

[命題2] Γを線型Coxeter群，Aをそのcartan行列とする。

次のいずれかが成立すると仮定しよう。

1) Aは(N)成分を持たない

2) $\mathrm{Cos}\,\Gamma$は(N)成分及び$\tilde{A}_\ell$成分を持たない。

このとき $A \sim \mathrm{Cos}\,\Gamma$ が成立する。

ここで， $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{A}_\ell$ $(\ell \geqq 2)$ は前のとおり．

$\mathrm{Cos}\,\Gamma = (-2\cos \pi/n_{ij})$ n_{ij}はR_iR_jの位数

§2 楕円型，放物型，及び双曲型Coxeter群.

Xをn次元単連結定曲率空間 すなわち，球面S^n，Euclid空間E^n，及びLobachevsky空間Λ^n とし，ΓをXの離散鏡映群とする。Xを$n+1$次元の実線型空間Vに埋め込み，ΓをVの直交Coxeter群と見ることにする。ここで次の定義を与える。

[定義] 線型Coxeter群Γが楕円型(elliptic)，放物型(parabolic)双曲型(hyperbolic)とは，次の表のXの離散鏡映群に線型Coxeter群として同型であるときをいう。

Γ	X	付加する条件
楕円型	S^n	が直径の両端を含まぬ
放物型	E^n	が有界
双曲型	Λ^n	ΓがΛ^nの真の平面及び無限遠点を不変にしない

ただし、ここでΛ^nの平面とはΛ^nとVの部分空間との共通部分であり、　は$\alpha_i \geq 0$で定義されるXの部分集合である。

Γが双曲型ならば　上の定義から、ΓはVに既約に働くことが分る。　植野氏の報告中にもある様に、線型Coxeter群Γで本質的な部分は、Γ^{red}にある。そこで、以下この§ではΓは被約(reduced)と仮定する。　またAをそのCartan行列とする。このとき、次の命題によって、上の3つの型を特徴づけることができる。

[命題3]　次は同値である。

1)　Γは楕円型

2)　V上にΓ不変で正定値な内積がある。

3)　$A = A^+$　　i.e.　Aは(Z),(N)成分をもたない。

4)　Γは有限群

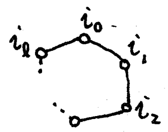
[命題4] 次は同値である

1) Γは放物型

2) V の codim 1 の部分空間V_0でΓ不変なもの及び V_0上のΓ不変な内積(正定値)が存在し. $V_0 \cap K = \{0\}$

3) $A = A^0$ $\quad \mathrm{rank}A = n$

4) ΓはCoxeter群としては放物型Coxeter群に同型でその Coxeter図形は $m-n$個の連結成分を持ち. 各 $\tilde{A}_l$ 型の成分に対し $|a_{i_0 i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_l i_0}| = \begin{cases} 1 & l \geqq 2 \\ 4 & l = 1. \end{cases}$



[命題5] 次は同値である.

1) Γは双曲型

2) ΓはVに既約に作用し. V上に符号数$(n.1)$ のΓ不変な内積が存在する.

3) Aは分解不能. (N) 型. $\mathrm{rank}\,A = n+1$ しかも Aは符号数$(n.1)$の対称行列と同値. すなわち. 正の対角行列Dを適当にとれば DAD^{-1} が $(n.1)$の対称行列になる。

§3　Kの複体としての構造.

Vを$n+1$次元実線型空間 $\Gamma=\langle R_1\cdots R_m\rangle$を$V$上の線型Coxeter群とする. Kを$\alpha_1\geqq 0\cdots\ \alpha_m\geqq 0$で定まる$V$の多面錐. K_iを$\alpha_i=0$で定まるKの面とする. $\mathfrak{F}K=\{F\subset K$ 面分$\}$ とおけば$\mathfrak{F}K$は組合せ複体の構造を持つ. $I_m=\{1,2,\cdots m\}$とし

$\sigma:\mathfrak{F}K\longrightarrow\mathcal{P}(I_m)$ を $\sigma(F)=\{i\in I_m\mid K_i\supset F\}$ で定義する.

このとき. $\mathfrak{F}K$ の構造について. 次のことが分る。

［定理2］　$S\subset I_m$に対し $\Gamma_S=\langle R_i\mid i\in S\rangle,\ K_S=\bigcap_{i\in S}K_i$ とおく. Γ_SはΓの部分群であり. K_SはKの面分である. このとき.

1). Γ_Sが有限群 $\Rightarrow$ $S\in\sigma(\mathfrak{F}K)$, $\dim K_S=n+1-|S|$

2) Γは放物型でない.とする.

Γ_SはCoxeter群として放物型でCoxeter図形の連結成分の数をrとするとき$|S|-r=n-1$, またこの図形の$\tilde{A}_\ell$成分について命題4の4)と同様なことが成立すると仮定すると.

$S\in\sigma(\mathfrak{F}K)$ かつ $\dim K_S=1$.

§4 perfect Coxeter群 及び quasi-perfect Coxeter群

楕円型，放物型 Coxeter群は，双曲型 Coxeter群に比べれば，よく解っている対象である。そこで，双曲型のうちでも，これらに"近い"性質を持つものを調べることは有用であろう。そのために，ここでは perfect Coxeter群 及び quasi-perfect Coxeter群 という概念を導入する。

Γを線型 Coxeter群，Kを§3で定義した多面体錐とする。KはΓの基本部屋になっている。さらに $C=(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K)^{\circ}$ とおく。（$^{\circ}$は interior を表す記号）

［定義］ Γは次を満すとき，perfect Coxeter群 と呼ばれる。

1) Γは既約（reduced）
2) $K-\{0\}\subset C$

$K^{f}=\{x\in K \mid \Gamma_x$ が有限群$\}$ とおくと，$C\cap K=K^{f}$ が示される。（植野氏の報告参照）よって 2)は $K-\{0\}\subset K^{f}$ と同値である。これより Γが楕円型あるいは放物型ならば，perfectである。しかし，perfectであっても直交Coxeter群でないものも存在する。たとえば，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & -a \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ -a^{-1} & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad a > 1$$

を Cartan 行列とする様な線型 Coxeter 群で被約なものがその例を与える。

さて、Γ が perfect なら $S \in \sigma(\mathfrak{F}K) - \{I_m\}$ に対し、Γ_S^{red} は有限群。よって Γ_S^{red} は楕円型である。そこで、perfect の類似概念として quasi-perfect を次の様に定義する。

[定義] 線型 Coxeter 群 Γ は次をみたすとき、quasi perfect Coxeter 群と呼ばれる。

1) Γ は被約

2) $S \in \sigma(\mathfrak{F}K) - \{I_m\} \Rightarrow \Gamma_S^{r}$ は楕円型もしくは放物型。

$\mathbb{P}V = V - \{0\} / \mathbb{R}^*$ とおき、$V - \{0\} \to \mathbb{P}V$ による $K - \{0\}$ の像を $\mathbb{P}K$ で表すことにする。$\mathbb{P}K$ は自然に複体の構造を持つ。

[補題3] Γ を被約な線型 Coxeter 群とする。各頂点 $Q \in \mathbb{P}K$ に対して $\Gamma_{\sigma(Q)}^{red}$ が楕円型もしくは放物型 とすると Γ は quasi-perfect. しかも頂点ではない面分 $F \subset \mathbb{P}K$ に対しては $\Gamma_{\sigma(F)}^{red}$ は楕円型になる。

これは $S \subset T \Rightarrow (\Gamma_S^{red})_T^{red} = \Gamma_T^{red}$ に注意すればよい

これより次の命題を得る.

[命題6] Γをquasi perfect Coxeter群とすると. 次のいずれかが成立する。

1) Γは楕円型

2) Γは放物型

3) Γは放物型 $\times\ \mathbb{Z}_2$ $\qquad \mathbb{Z}_2=\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{R}$

4) Aは分解不能. (N)型. $\operatorname{rank} A=\dim V$

§2の結果と合わせれば.

[命題7] Γをquasi perfectな直交Coxeter群とすると. Γは 楕円型. 放物型. 双曲型 あるいは放物型 $\times\ \mathbb{Z}_2$ のいずれかになる。

最後に. 双曲型については次のことが分る。

[命題8] ΓはΛ^nの双曲型Coxeter群とする. このとき

1) Γがperfect $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Λ^n/Γが compact

2) Γがquasi-perfect $\Leftrightarrow$ Λ^n/Γが 体積有限

尚, 文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。